FORMAS LIBRES (II)

SUPERFICIES NURBS

por

SONIA LUISA RUEDA PÉREZ



CUADERNOS

DEL INSTITUTO

JUAN DE HERRERA

DE LA *ESCUELA DE*

ARQUITECTURA

DE MADRID

3-78-04

FORMAS LIBRES (II)

SUPERFICIES NURBS

por

SONIA LUISA RUEDA PÉREZ

CUADERNOS

DEL INSTITUTO

JUAN DE HERRERA

DE LA *ESCUELA DE*

ARQUITECTURA

DE MADRID

3-78-04

C U A D E R N O S
D E L   I N S T I T U T O
J U A N   D E   H E R R E R A

NUMERACIÓN

3 Área
78 Autor
04 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Formas libres (II)
Superficies NURBS

Instituto Juan de Herrera
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid
Gestión y portada: Alba Peña Fernández
CUADERNO 457.01 / 3-78-04
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-538-4
ISBN-13: 978-84-9728-540-7
Depósito Legal: M-19076-2015

Índice general

Índice de figuras




Figura 1: Ópera de Sidney (1957-73)

En los años 40 y 50 las necesidades prácticas de la industria aeronáutica y manufacturera supusieron el comienzo de la descripción matemática de superficies de forma libre (*freeform surfaces*). Para resolver problemas como el almacenamiento digital de una superficie o la comunicación del diseño de una superficie de forma libre, se vio la necesidad de diseñar algoritmos matemáticos apropiados con los que programar dichas superficies.

Las matemáticas de las superficies de forma libre en CAGD (*Computer Aided Geometric Design*) estuvieron motivadas por las necesidades de la industria [2], con autores como R. Liming y J. Ferguson de Boeing, S. Coons del MIT, M. Sabin de la British Aircraft Corporation, P. de Casteljau de Citröen y P. Bézier de Renault. Se comprendió que, no era posible conseguir la flexibilidad que requiere el diseño de formas tridimensionales actual, utilizando sólo superficies clásicas. El uso de las superficies de forma libre se ha extendido también a la arquitectura, generalizando el uso de sistemas de CAD, basados en superficies NURBS, para el desarrollo de proyectos arquitectónicos.

Estos apuntes están especialmente dirigidos a alumnos del Taller Experimental II: Proyectos de Arquitectura Paramétrica, y alumnos del Grado en Fundamentos de la Arquitectura, interesados en profundizar en las herramientas matemáticas utilizadas para crear curvas de forma libre (en Grasshopper y Rhinosceros). En la medida de lo posible, se ha intentado suavizar el rigor matemático, utilizando sólo el nivel necesario para trasmitir las posibilidades que ofrecen las superficies NURBS al diseñador. Se ha puesto énfasis en conectar el uso de Grasshopper con las matemáticas que soportan este programa de ordenador.

`Grasshopper` es un componente de Rhinosceros 3D que se ha popularizado por su capacidad para generar diseño paramétrico. Es un editor gráfico de algoritmos que no requiere conocimientos de programación, pero permite al diseñador la construcción de generadores de formas tanto simples como asombrosas.

Este cuadernillo es la continuación de [6], de donde tomaremos la notación y la terminología descritas para curvas NURBS, es el segundo volumen de la serie:

- FORMAS LIBRES I: Curvas NURBS.
- FORMAS LIBRES II: Superficies NURBS.

1 *Superficies de Bézier*

Para definir una superficie de Bézier necesitamos una malla de control, que está determinada por un conjunto de $(m+1)\times(n+1)$ puntos o vértices de control en $\mathbb{R}^3$ ordenados

$$B_{i,j}, i=0,\dots,m, j=0,\dots,n.$$

Llamamos $B=(B_{i,j})$ a la matriz de control de $m+1$ filas y $n+1$ columnas que cuyos elementos son las coordenadas de los puntos de control. Las caras de la malla de control son cuadriláteros, formados por aristas que unen los vértices

$$\begin{array}{l} B_{i,j} \text{ con } B_{i+1,j},\ \ B_{i,j+1} \text{ con } B_{i+1,j+1} \rightarrow \text{ Aristas columna,} \\ B_{i,j} \text{ con } B_{i,j+1},\ \ B_{i+1,j} \text{ con } B_{i+1,j+1} \rightarrow \text{ Aristas fila.} \end{array}$$

Es por tanto la numeración de los vértices lo que establece su unión por aristas, definiendo así las caras o facetas de la malla de control. Si cambiamos la numeración de los puntos de control, la malla que obtenemos y en consecuencia la superficie de Bézier correspondiente será totalmente distinta.

Ejemplo 1.0.1. *Una* superficie de Bézier de bigrado $(1,1)$ *tiene como malla de control un solo cuadrilátero, con matriz de vértices de control (incluimos las coordenadas de los vértices de la figura 1.1)*

$$B=\begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} \\ B_{1,0} & B_{1,1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (0,0,0) & (2,-1,1) \\ (1,2,0) & (2,2,-2) \end{bmatrix}.$$

La superficie de Bézier es parte de un paraboloide hiperbólico, superficie reglada formada por dos familias de rectas que unen las aristas del cuadrilátero de control (véase la figura 1.1). Si parametrizamos dos lados del cuadrilátero

$$r_0(v)=(1-v)B_{0,0}+vB_{0,1} \text{ y } r_1(v)=(1-v)B_{1,0}+vB_{1,1},\ \ v\in[0,1],$$

la parametrización de la superficie de Bézier es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(u,v)=&(1-u)r_0(v)+ur_1(v) \\ =&(1-u)(1-v)B_{0,0}+(1-u)vB_{0,1}+u(1-v)B_{1,0}+uvB_{1,1},\ \ u,v\in[0,1], \\ =&(-uv+u+2v, uv+2u-v, -3uv+v) \quad \textit{en la figura 1.1.} \end{aligned}$$

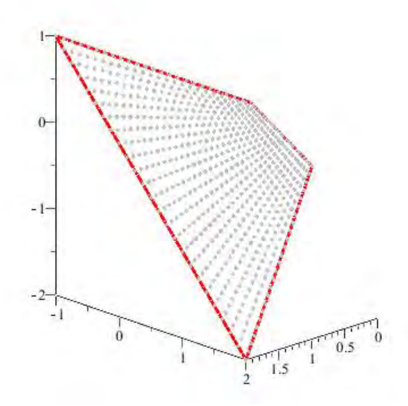


Figura 1.1: Superficie de Bézier de bigrado $(1,1)$, (paraboloide hiperbólico)

1.1. Definición de superficie de Bézier

La superficie de Bézier $\mathcal{S}$ de bigrado (n,m) con puntos de control $B_{i,j}$, está parametrizada por

$$\mathcal{P}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} J_{m,i}(v) J_{n,j}(u) B_{i,j}, \quad 0 \leq u, v \leq 1.$$

siendo los polinomios de Bernstein

$$J_{m,i}(v) = \left(\begin{array}{c} m \\ i \end{array} \right) v^i (1-v)^{m-i},$$
$$J_{n,j}(u) = \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) u^j (1-u)^{n-j}.$$

Podemos observar que el grado de la parametrizción en u es n y en v es m. Además la superficie contiene dos familias de curvas (las curvas coordenadas), que son curvas de Bézier. Veamos cómo determinar las llamadas u-curvas:

1. Cada polígono columna de la malla de control (con vértices $B_{0,j}, \ldots, B_{m,j}$) determina una curva de Bézier con parametrización

$$\mathcal{P}_j(v) = \sum_{i=0}^{m} J_{m,i}(v) B_{i,j}, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

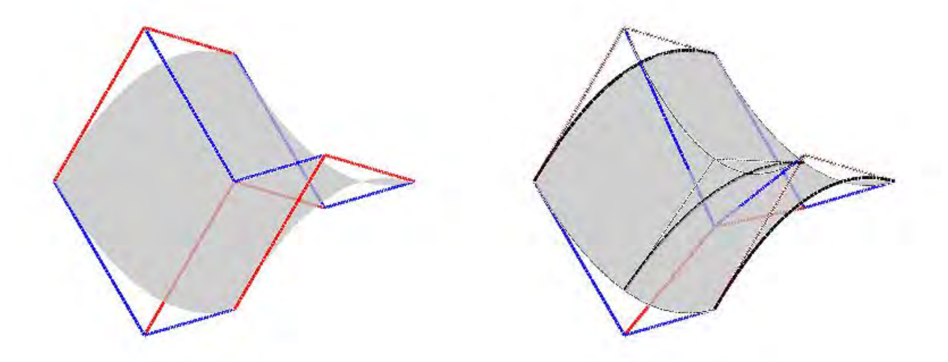


Figura 1.2: (Izq) Superficie de Bézier de bigrado $(2,2)$ con malla de control; (Dcha) u-curvas y sus polígonos de control

2. Fijado $v = k \in [0,1]$, tenemos los puntos de control $R_j = \mathcal{P}_j(k)$, $j = 0, \ldots, n$ de la u-curva de Bézier, cuya paramatrización es

$$\mathcal{P}(u,k) = \sum_{j=0}^{n} J_{n,j}(u) R_j, \;\; 0 \leq u \leq 1.$$

Análogamente, las v-curvas de Bézier de grado m, están parametrizadas por

$$\mathcal{P}(k,v) = \sum_{i=0}^{m} J_{m,i}(v) S_i, \;\; 0 \leq v \leq 1,$$

con vértices de control $S_i = \mathcal{Q}_i(k)$, resultantes de fijar $u = k \in [0,1]$ en las curvas $\mathcal{Q}_i(u) = \sum_{j=0}^{n} J_{n,j}(u) B_{i,j}$.

Ejemplo 1.1.1. *La matriz de control de la superficie de Bézier de la figura 1.2, es*

$$B = \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0,0,1) & (1,0,2) & (2,0,1) \\ (0,1,0) & (1,1,1/2) & (2,1,0) \\ (0,2,1) & (1,2,2) & (2,2,1) \end{bmatrix}.$$

La parametrización de la superficie de Bézier es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(u,v) =& \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} J_{2,i}(v) J_{2,j}(u) B_{i,j}, \;\; 0 \leq u, v \leq 1. \\ =&(2u, 2v, -2v^2u^2 + 2v^2u + 2v^2 - 2uv + 2vu^2 - 2u^2 + 2u + 1 - 2v). \end{aligned}$$

1.2. Propiedades de las superficies de Bézier

La definición de la parametrización de una superficie de Bézier a partir de los polinomios de Bernstein, nos permite destacar las siguientes propiedades (que se pueden observar en los ejemplos), véanse [2] y [5].

1. El grado de la parametrización en u es n y en v es m, igual al número de puntos de control menos uno de una fila, o una columna respectivamente, de la malla de control (es decir, de la matriz B).

2. En general sólo las esquinas de la malla de control están contenidas en la superficie de Bézier. Aunque existen casos en los que contiene a aristas de la malla, como sucede en las superficies regladas.

3. La superficie de Bézier está contenida en la envolvente convexa de la malla de control. Intuitivamente, la envolvente convexa de un conjunto de puntos en el espacio $\mathbb{R}^3$ es el poliedro que resultaría de envolver dichos puntos con una tela tensada. La envolvente convexa de una nube de puntos es el poliedro que contiene a la arista que une dos puntos cualesquiera.

4. La superficie de Bézier es invariante por transformaciones afines. Esto quiere decir que la transformada de una superficie de Bézier coincide con la superficie de Bézier de los puntos transformados.

5. Los polígonos de control de la frontera de la malla de control, determinan curvas de Bézier que son las curvas borde de la superficie de Bézier. De hecho, son los únicos polígonos de control fila o columna de la malla que podemos garantizar determinan curvas de Bézier contenidas en la superficie, véase el ejemplo de la figura 1.2.

Al igual que sucede con curvas de Bézier, si modificamos un vértice de control, se produce un efecto global en toda la superficie de Bézier. Esto se debe a que cada vértice multiplica a un par de polinomios de Bernstein, que toman valores en todo el intervalo de definición de los parámetros.

Las superficies de Bézier, generalmente siguen la forma de la malla de control pero, como sucede con las curvas de Bézier, conforme aumentan los grados n y m en alguna de las direcciones de la malla, la superficie aproxima peor a la malla. Analizamos con más detalle las superficies de Bézier de bigrado bajo, ya que son de gran interés en arquitectura (como es el caso de las superficies regladas) y además son tipos de superficies que el alumno ha estudiado en las asignaturas de matemáticas del Grado en Fundamentos de la Arquitectura, ETSAM.

1.3. Superficies regladas de Bézier

Una superficie de Bézier de bigrado $(n, 1)$ tiene v-curvas de grado 1 y es por tanto una superficie reglada ya que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(u,v) =&\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{n} J_{1,i}(v)J_{n,j}(u)B_{i,j}\\ =&(1-v)\sum_{j=0}^{n} J_{n,j}(u)B_{0,j} + v\sum_{j=0}^{n} J_{n,j}(u)B_{1,j}, \quad 0 \leq u, v \leq 1.\end{aligned}$$

Análogamente, una superficie de Bézier de bigrado $(1, m)$ es una superficie reglada cuyas u-curvas son rectas.

Ejemplo 1.3.1. *Sea B la matriz $(m+1)\times(n+1) = 4\times 2$ de vértices de control*

$$B = \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} \\ B_{1,0} & B_{1,1} \\ B_{2,0} & B_{2,1} \\ B_{3,0} & B_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0,0,0) & (3,0,0) \\ (0{,}2,2,1) & (2{,}5,2{,}1,1{,}5) \\ (-0{,}5,4,0{,}5) & (3{,}2,3{,}9,1) \\ (-0{,}3,5{,}8,2) & (3,6,2{,}5) \end{bmatrix}.$$

La superficie de Bézier que determina es de bigrado $(n, m) = (1, 3)$, es una superficie reglada con parametrización

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(u,v) =&J_{1,0}(u)\sum_{i=0}^{3} J_{3,i}(v)B_{i,0} + J_{1,1}(u)\sum_{i=0}^{3} J_{3,i}(v)B_{i,1}\\ =&(1-u)\sum_{i=0}^{3} J_{3,i}(v)B_{i,0} + u\sum_{i=0}^{3} J_{3,i}(v)B_{i,1}, \quad 0 \leq u, v \leq 1.\end{aligned}$$

que mostramos en la figura 1.3.

Dada una superficie reglada de Bézier de bigrado $(1, m)$, surgen los siguientes casos particulares:

1. Si todas las aristas fila de la malla de control son paralelas entonces $\mathcal{S}$ es una superficie cilíndrica (un cilindro generalizado).

2. Si todos los puntos de control de una columna coinciden $B_{0,j} = \cdots = B_{m,j}$ entonces la superficies es reglada cónica (un cono generalizado).

Véanse los ejemplos de la figura 1.4.

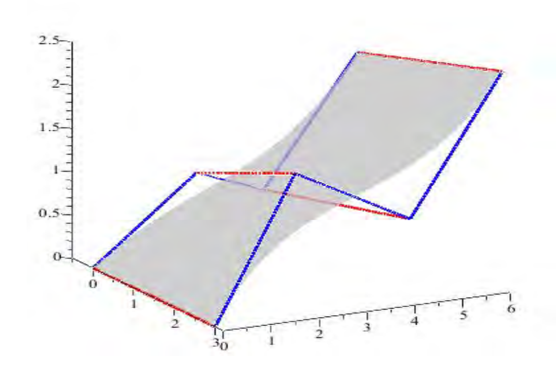


Figura 1.3: Superficie de Bézier de bigrado $(1, 3)$ con malla de control

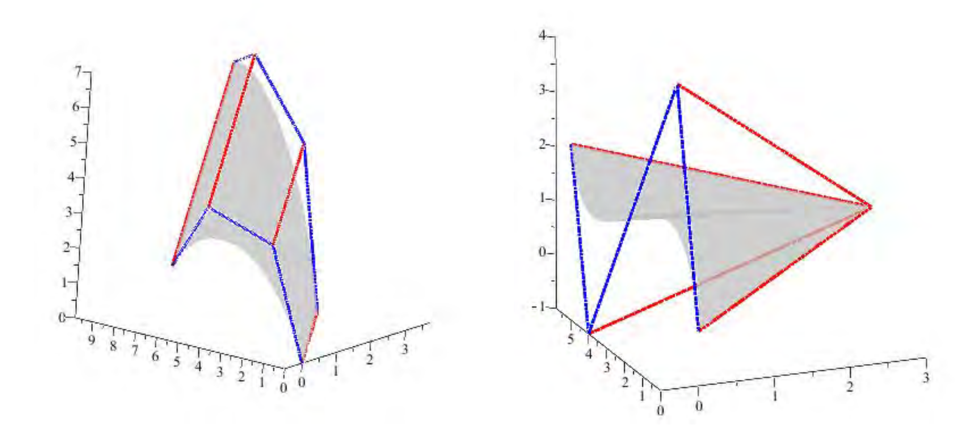


Figura 1.4: (Izq) Superficies de Bézier regladas de bigrado $(1, 3)$ (izq) cilíndrica y (dcha) cónica

Ejemplo 1.3.2. *Las matrices de control de los ejemplos de la figura 1.4 son:*

$$B = \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} \\ B_{1,0} & B_{1,1} \\ B_{2,0} & B_{2,1} \\ B_{3,0} & B_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0,0,0) & (1,1,1) \\ (0{,}2,2,1) & (2{,}2,4,3) \\ (-0{,}5,4,0{,}5) & (2{,}5,7,7) \\ (-0{,}3,5{,}8,2) & (3{,}7,9{,}8,6) \end{bmatrix}$$

en la superficie cilíndrica y

$$B = \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} \\ B_{1,0} & B_{1,1} \\ B_{2,0} & B_{2,1} \\ B_{3,0} & B_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0,0,0) & (3,3,1) \\ (0{,}2,2,1) & (3,3,1) \\ (-0{,}5,4,0{,}5) & (3,3,1) \\ (-0{,}3,5{,}8,2) & (3,3,1) \end{bmatrix}$$

en la superficie cónica.

Las superficies regladas cilíndricas y cónicas son superficies desarrollables. Existe un tipo más de superficie desarrollable, las superficies desarrollables tangenciales. Todas ellas son de gran interés en la industria, especialmente adecuadas para diseñar con láminas de acero u otros materiales susceptibles de ser doblados, enrollados y cortados, pero que plantean más problemas para ser curvados. Las superficies desarrollables tienen curvatura de Gauss nula en todos sus puntos, son intrínsecamente planas, se puede utilizar cualquiera de sus generatrices para cortar y desplegar la superficie sobre un plano. Actualmente son de gran interés en arquitectura, [1], [3] relacionados con la panelización de superficies de distintas curvaturas mediante superficies desarrollables, [4].

1.4. Superficies de Bézier de traslación

Vamos a construir una superficie de Bézier trasladando una v-curva de Bézier a lo largo de una u-curva de Bézier. Para ello definimos la malla de control apropiada. Si tuviésemos las parametrizaciones $\eta(v)$ y $\gamma(u)$ de las curvas, y suponiendo que tienen un punto en común $\gamma(0) = \eta(0)$, la parametrización de la traslación es

$$\alpha(u, v) = \gamma(u) + \beta(u) - \beta(0), \tag{1.1}$$

por lo que a la superficie de traslación también se le llama superficie suma.

Partimos ahora de dos polígonos de control, los vértices de la columna 0 de la malla de control son $B_{0,0}, B_{1,0} \ldots, B_{m,0}$ y los vértices de la fila 0 de la malla de control son $B_{0,0}, B_{0,1}, \ldots, B_{0,n}$. Utilizando el vector $w = B_{0,1} - B_{0,0}$ para desplazar la columna 0, obtenemos los vértices de la columna 1 de la malla de control

$$B_{0,1} = B_{0,0} + w, B_{1,1} = B_{1,0} + w \ldots, B_{m,1} = B_{m,0} + w.$$

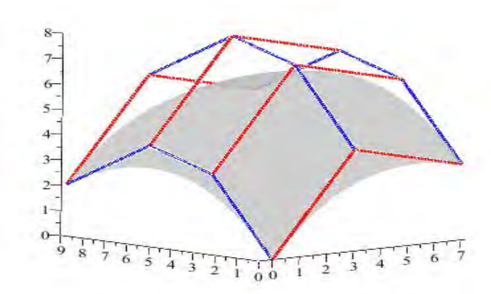


Figura 1.5: Superficie de Bézier de traslación, de bigrado $(2, 3)$

Repitiendo este argumento, trasladamos la columna j, utilizando el vector $w_j = B_{0,j+1} - B_{0,j}$, $j = 0, \ldots, n-1$ para obtener los vértices de la columna $j+1$ de la malla de control

$$B_{0,j+1} = B_{0,j} + w_j, B_{1,j+1} = B_{1,j} + w_j \ldots, B_{m,j+1} = B_{m,j} + w_j.$$

Tenemos así la malla de control que determina una superficie de Bézier $\mathcal{S}$ de traslación. La misma superficie $\mathcal{S}$ se obtiene al trasladar las u-curva de Bézier sobre la v-curva de Bézier.

Ejemplo 1.4.1. *Dados los vértices de control de dos curvas de Bézier*

$$C = [[0, 0, 0], [0{,}2, 3, 3], [-0{,}5, 5, 4], [-0{,}3, 9, 2]],$$
$$R = [[0, 0, 0], [3, 0, 4], [7, 0, 3]],$$

$C = [C_1, C_2, C_3, C_4]$ de una curva de grado 3 y $R = [R_1, R_2, R_3]$ de una curva de grado 2. Trasladamos los vértices C, utilizando los vértices R para obtener la matriz de vértices B de la malla de control, de la superficie de Bézier de traslación, de la figura 1.5.

$$B = \begin{bmatrix} C_1 & C_1 + w_1 & C_1 + w_1 + w_2 \\ C_2 & C_2 + w_1 & C_2 + w_1 + w_2 \\ C_3 & C_3 + w_1 & C_3 + w_1 + w_2 \\ C_4 & C_4 + w_1 & C_4 + w_1 + w_2 \end{bmatrix}, \quad w_1 = R_2 - R_1, \quad w_2 = R_3 - R_2.$$

1.5. Superficies Coons

Dadas 4 curvas que formen un cuadrilátero curvo, queremos calcular una superficie que las tenga como borde (véase la figura 1.6). Partiendo de las parametrizaciones

de las cuatro curvas $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ y $\eta_1, \eta_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, buscamos la parametrización $\alpha : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de una superficie que verifique

$$\begin{aligned} &\alpha(u,0) = \gamma_1(u), \;\; \alpha(u,1) = \gamma_2(u), \;\; u \in [0,1], \;\; \text{u-curvas} \\ &\alpha(0,v) = \eta_1(v), \;\; \alpha(1,v) = \eta_2(v), \;\; v \in [0,1], \;\; \text{v-curvas.} \end{aligned}$$

Existen infinitas superficies con esta propiedad y por tanto infinitas soluciones al problema planteado. Proporcionamos una de las más sencillas mediante los siguientes pasos.

1. Parametrizamos la superficie reglada que une las u-curvas

$$\sigma_1(u,v) = (1-v)\gamma_1(u) + v\gamma_2(u), \;\; u,v \in [0,1].$$

2. Parametrizamos la superficies reglada que une las v-curvas

$$\sigma_2(u,v) = (1-u)\eta_1(v) + u\eta_2(v), \;\; u,v \in [0,1].$$

3. Tomando los 4 vértices del cuadrilátero curvo (intersecciones de las curvas borde dos a dos)

$$\begin{aligned} a = \gamma_1(0) = \eta_1(0), \;\; b = \gamma_1(1) = \eta_2(0), \\ c = \gamma_2(1) = \eta_1(1), \;\; d = \gamma_2(1) = \eta_2(1), \end{aligned}$$

parametrizamos el paraboloide hiperbólico que interpola esos cuatro puntos (como en el Ejemplo 1.0.1)

$$\sigma_3(u,v) = (1-v)((1-u)a + ub) + v((1-u)c + ud), \;\; u,v \in [0,1],$$

de forma que $a = \sigma_3(0,0)$, $b = \sigma_3(1,0)$, $c = \sigma_3(0,1)$ and $d = \sigma_3(1,1)$.

4. La superficie parametrizada por

$$\alpha(u,v) = \sigma_1(u,v) + \sigma_2(u,v) - \sigma_3(u,v), \;\; u,v \in [0,1],$$

es una solución del problema planteado.

Las superficies regladas son superficies de Coons para las que las u-curvas o las v-curvas son rectas. Las superficies de traslación son superficies Coons para las que las u-curvas y las v-curvas son traslación una de otra, esto es

$$\gamma_2(u) = \gamma_1(u) + w_1 \text{ y } \eta_2(u) = \eta_1(u) + w_2$$

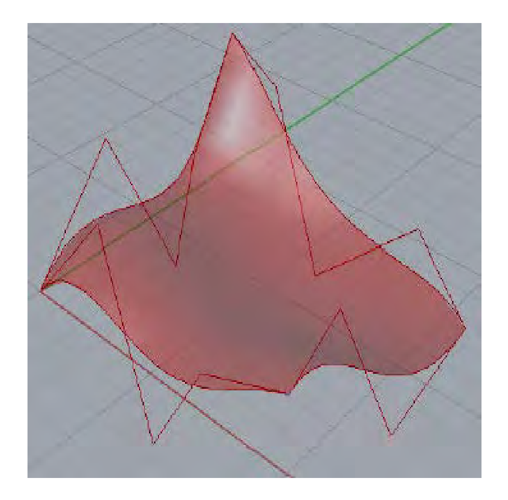


Figura 1.6: Superficie Coons determinada por cuatro curvas de Bézier

con w_1 y w_2 vectores de $\mathbb{R}^3$.

Si partimos de 4 curvas de Bézier, sería normal preguntarse cómo obtener, a partir de sus polígonos de control, la malla de control de una superficie de Bézier que sea superficie Coons de las 4 curvas dadas. Partiríamos por tanto de los vértices de control de las u-curvas

$$B_{0,0}, \ldots, B_{0,n} \Rightarrow \gamma_1, \tag{1.2}$$

$$B_{m,0}, \ldots, B_{m,n} \Rightarrow \gamma_2, \tag{1.3}$$

y de los vértices de control de las v-curvas

$$B_{0,0}, \ldots, B_{m,0} \Rightarrow \eta_1, \tag{1.4}$$

$$B_{0,n}, \ldots, B_{m,n} \Rightarrow \eta_2. \tag{1.5}$$

Obsérvese que tomamos u-curvas y v-curvas de Bézier del mismo grado, con el mismo número de puntos de control, para que sea posible construir la malla (en otro caso, existen algoritmos para añadir o quitar vértices de control, que se podrían utilizar para alcanzar esta situación de partida [5]). Tendríamos que calcular todos los vértices interiores de la matriz B de vértices

$$B = \begin{bmatrix} a = B_{0,0} & \cdots & B_{0,j} & \cdots & b = B_{0,n} \\ \vdots & \cdots & * & \cdots & \vdots \\ B_{i,0} & * & * & * & B_{i,n} \\ \vdots & \cdots & * & \cdots & \vdots \\ c = B_{m,0} & \cdots & B_{m,j} & \cdots & d = B_{m,n} \end{bmatrix}$$

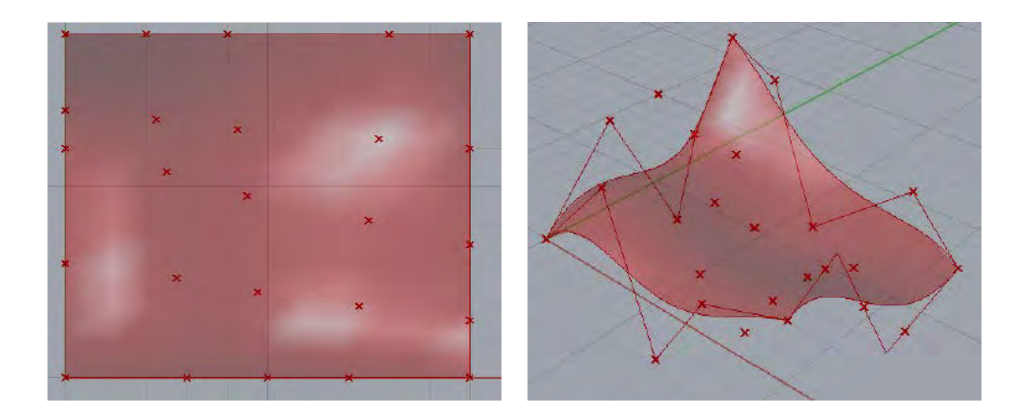


Figura 1.7: (Izq) Vista superior de superficie Coons con puntos de control (dcha) vista en perspectiva

Utilizamos la misma estrategia de la construcción de la parametrización $\alpha(u,v)$ pero con los vértices de control (recordamos que los vértices de control internos de las curvas borde no están contenidos en la curva)

$$B_{i,j} = \left(1-\frac{i}{m}\right)B_{i,0} + \left(\frac{i}{m}\right)B_{i,n} + \left(1-\frac{j}{n}\right)B_{0,j} + \left(\frac{j}{n}\right)B_{m,j} \tag{1.6}$$

$$-\left(1-\frac{i}{m}\right)\left(\left(1-\frac{j}{n}\right)a + \left(\frac{j}{n}\right)b\right) - \left(\frac{i}{m}\right)\left(\left(1-\frac{j}{n}\right)c + \left(\frac{j}{n}\right)d\right). \tag{1.7}$$

Mostramos en la figura 1.7 una superficie Coons de Bézier de bigrado $(4,4)$ con su malla de control.

2 Superficies B-spline y NURBS

Por contener familias de curvas de Bézier, las superficies de Bézier tienen problemas heredados de estas. Si uno de los grados de la superficie es muy alto, la superficie aproxima bastante mal la forma de la malla de control. Por otra parte, si cambiamos un punto de control de la malla, el efecto es global sobre la superficie de Bézier. Para evitar ese problema se utilizan superficies B-spline (de *basis spline*).

2.1. Superficies B-spline

Una superficie B-spline $\mathcal{S}$ está definida también a partir de una malla de control, aunque se flexibiliza la elección del bigrado y de la elección de la base de funciones utilizadas para definir la parametrización. De forma más precisa, la parametrización $\mathcal{P}(u, v)$ de una superficie B-spline se construye utilizando los siguientes ingredientes:

1. Una malla de control determinada por una matriz B de $(m+1)\times(n+1)$ puntos de control.

2. El bigrado (h, k) de $\mathcal{S}$, con $1 \leq h \leq n$, $1 \leq k \leq m$. Dicha elección repercute en la diferenciabilidad de la superficie y en la aproximación de la forma de la malla de control.

3. Dos vectores de nudos X e Y, uno para dividir el intervalo en el que se mueve el parámetro u y otro para dividir el intervalo de definición de v. Remitimos al lector interesado a [6] para estudiar el papel que juega el vector de nudos en curvas B-spline y a [5] en curvas y superficies B-spline.

El lector interesado en la definición precisa de la parametrización puede encontrarla en [5], Sección 6.1. Para limitar el nivel de dificultad de la exposición matemática, en este cuadernillo nos centramos en analizar el efecto producido por la elección de estos ingredientes, que como entradas de una caja negra, producen la superficie B-spline.

La elección del bigrado juega un papel importante:

1. $(h, k) = (1, 1)$ La superficie contiene todos los vértices de control, más aún contiene las aristas de la malla de control, que son bordes angulosos. La superficie B-spline está formada en este caso por trozos de superficies de Bézier de bigrado $(1, 1)$.

2. $(h, k) = (n, m)$ En este caso la superficie B-spline es una superficie de Bézier de bigrado (n, m).

3. $(0 < h < n$ **y** $0 < k < m)$ La superficie B-spline está formada por varios trozos de superficies de Bézier de bigrado (h, k).

Las superficies B-spline heredan las propiedades 2,3 y 4 de las superficies de Bézier, véase la sección 1.2. Podemos añadir que:

1. La parametrización $\mathcal{P}(u, v)$ es de clase C^{h-1} en la variable u y de clase C^{k-1} en la variable v.

2. La variación de un vértice de la malla de control está limitada a trozos de superficie adyacentes.

2.2. Superficies NURBS

Debido a que hay muchas superficies que no admiten parametrizaciones polinomiales, aparecieron las formas racionales de las superficies B-spline. En general se llaman superficies B-spline racionales no uniformes, NURBS (*Non Uniform Rational B-spline*) y permiten definir muchas de las superficies comunes en CAD, cuádricas y toda clase de superficies para el diseño de automóviles, aviones, barcos, y cada vez tienen más importancia en arquitectura, dada la complejidad del diseño arquitectónico actual [5] (como los edificios cubiertos con láminas de metal realizados por el arquitecto Frank Gehry, figura 2.1).

Las superficies NURBS son superficies B-spline que asignan pesos a los vértices del polígono de control. Además de elegir el bigrado (h, k) de la superficie, podemos modificar el valor de los pesos para acercar o alejar la superficie de un vértice de la malla de control. Cuando los pesos son todos iguales (pueden ser todos 1) la superficie es polinómica, es una B-spline no racional, y en otro caso es una superficie B-spline racional. Recordamos que elipses e hipérbolas son curvas que no admiten una parametrización polinomial, se construyen mediante curvas B-spline racionales [6]. De la misma forma, la mayoría de las superficies cuádricas no son polinomiales y han de construirse mediante superficies B-spline racionales.



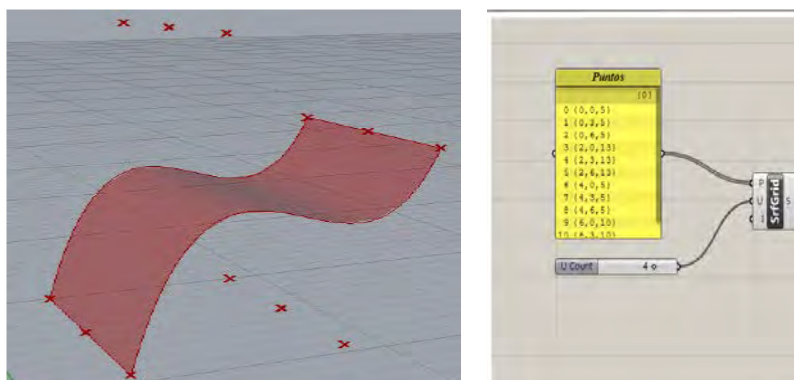

Figura 2.1: Museo Guggenheim de Bilbao. Frank O. Gehry, 1997

2.2.1. Superficies regladas

Podemos observar que las superficies regladas de Bézier, conectan con rectas curvas de Bézier del mismo grado. Si queremos definir superficies regladas más generales hemos de utilizar superficies NURBS (B-spline racionales o no), que conecten curvas NURBS del mismo grado, con el mismo vector de nudos y el mismo número de vértices de control. Si las curvas de partida vienen dadas por NURBS que no tienen el mismo grado, podemos aumentar el grado e insertar nudos, para garantizar el mismo número de vértices de control en ambas curvas. Podríamos conectar así, por ejemplo, mediante rectas un arco de círculo con una curva B-spline de grado 4.

2.2.2. Superficies de revolución

Girar una curva alrededor de un eje dado es quizás uno de los métodos más sencillos para crear multitud de formas tridimensionales. Como superficies NURBS, las superficies de revolución se definen mediante superficies B-spline racionales. El aspecto racional viene obligado por la existencia de secciones (con planos ortogonales al eje de revolución) que son circunferencias. Recordemos que una circunferencia completa se obtiene combinando 4 cuartos de circunferencia, utilizando 9 puntos de control (3 para cada cuarto de circunferencia). Así para generar la malla de control de una superficie de revolución trasladamos a lo largo de los vértices de control de la circunferencia, el polígono de control de la curva NURBS que genera la superficie de revolución.



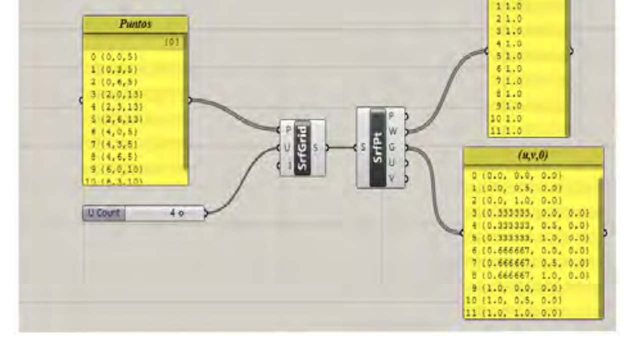


Figura 2.2: (Izq) Superficie en Rhino. (Dcha) Los componentes `SurfGrid` y `SrfPt` de Grasshopper

2.3. Superficies NURBS en Grasshopper

Todas las superficies que crea Grasshopper son superficies NURBS. Los componentes (o burbujas) de Grasshopper que nos permiten obtener los datos de cálculo de la superficie NURBS (que utiliza Grasshopper) son:

1. `SrfGrid` *Surface From Points*, crea S, una superficie NURBS a partir de sus puntos de control. Toma como input P, la lista de puntos de control y U, el número de puntos en la dirección u, en nuestra notación $n+1$ (número de columnas de la matriz B). La lista de puntos P contiene las columnas de la matriz de control B concatenadas

$$P = \{B_{0,0}, \dots, B_{0,m}, B_{1,0}, \dots, B_{1,m}, \dots, B_{n,0}, \dots, B_{n,m}\}.$$

2. `SrfPt` *Surface Points*, toma como input una superficie S y devuelve la lista P de los puntos de control, la lista W de pesos, la lista G de los parámetros (u, v) para cada punto de P, el número de puntos U a los largo de la dirección u (para nosotros $n+1$) y el número de puntos V a lo largo de la dirección v (para nosotros $m+1$).

Ilustramos el uso de estos dos componentes en la figura 2.2, creando primero una superficie NURBS mediante `SrfGrid` y obteniendo posteriormente, mediante `SrfPt`, los datos de la superficie NURBS creada. Observamos que en realidad `SrfGrid` construye una superficie de Bézier no racional (el tipo más sencillo de superficie NURBS), a partir de 12 puntos ($n+1 = 4$ en la dirección u). La superficie generada por Grasshopper es de bigrado $(3, 2)$ con pesos igual a 1 para todos los puntos.

Actualmente, no existe un componente de Grasshopper que nos permita modificar el bigrado de la superficie NURBS, ni el vector de nudos, ni los pesos. Si bien esto es posible utilizando `RhinoScript` el código en $C_\sharp$ de Rhinos, apropiado para usuarios familiarizados con la programación orientada a objetos. Si partimos de una matriz B de $(m+1)\times(n+1)$ puntos de control, mediante `SurfGrid` obtenemos siempre una superficie NURBS de bigrado máximo (n,m), que es por tanto una superficie de Bézier (no racional pues los pesos son todos iguales a 1).

Sin embargo, muchas de las superficies que podemos construir con Grasshopper son superficies NURBS, que no tienen por qué ser de Bézier, pueden ser racionales. Utilizando `SrfPt`, analizamos en los ejemplos que siguen los puntos y pesos utilizados por Grasshopper para construir superficies de revolución, regladas y Coons.

2.3.1. Cilindro

Mostramos en la figura 2.3 un cilindro, construido en Grasshopper con el componente `Cyl` de radio $R=2$ y longitud $L=3$. Mediante `SrfPt` obtenemos la lista P de los puntos de control y la lista W de los pesos. Se han utilizado 18 puntos de control. Es una superficie reglada y de revolución. En la dirección v contiene rectas y es por tanto de grado $m=1$ en v. Las secciones ortogonales a las rectas generatrices son circunferencias. Una circunferencia es una curva B-spline racional, necesitamos 9 puntos de control para obtener la curva NURBS que la describe, con 3 puntos de control tenemos un cuarto de circunferencia, que es una curva de grado 2. Por esta razón en la dirección u la superficie tiene grado $n=2$. Así que Grasshopper ha construido el cilindro utilizando una superficie NURBS de bigrado $(2,1)$, que está dividida en 4 superficies de Bézier debido a que cada 3 columnas de la malla de control definen una superficie de Bézier racional de bigrado $(2,1)$, que contiene a los puntos de la primera y tercera columna. Además es una superficie NURBS cerrada, ya que la primera y la última columnas de la matriz B coinciden. La matriz B de puntos de control es

$$\begin{bmatrix} (2,0,0) & (2,2,0) & (0,2,0) & (-2,2,0) & (-2,0,0) & (-2,-2,0) & (0,-2,0) & (2,-2,0) & (2,0,0) \\ (2,0,3) & (2,2,3) & (0,2,3) & (-2,2,3) & (-2,0,3) & (-2,-2,3) & (0,-2,3) & (2,-2,3) & (2,0,3) \end{bmatrix}.$$

El cuarto de circunferencia del plano $z=0$ determinado por los puntos de control

$$B_{0,0}=(2,0,0), B_{0,1}=(2,2,0) \text{ y } B_{0,2}=(0,2,0)$$

es una curva de Bézier racional con pesos $w_{0,0}=1$, $w_{0,1}=0,707107$ y $w_{0,2}=1$ respectivamente (observamos que $w_{0,1}$ es una aproximación de $\sqrt{2}/2$).

2.3.2. Superficies dadas por curvas rail

Analicemos cómo opera el componente `Loft` de Grasshopper. Tomo como input una lista de curvas C y es posible establecer opciones O. Para crear las opciones O

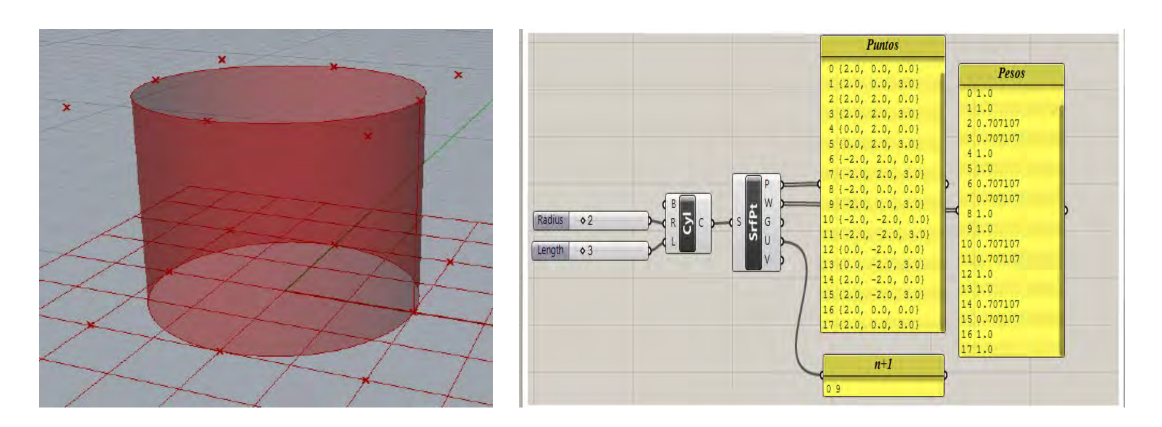


Figura 2.3: (Izq) Cilindro dibujado en Rhinos utilizando el Grasshopper (dcha)

se utiliza el componente `Loft Opt`, que tiene 5 entradas, de las que destacamos T, el tipo que puede ser

$$0 = \text{Normal},\ 1 = \textit{Loose},\ 2 = \text{Tight},\ 3 = \text{Straight},\ 4 = \text{Developable},\ 5 = \text{Uniform}.$$

Todos los tipos devuelven una superficie NURBS, exceptuando el 4 =Developable.

1. Ejemplo de la figura 2.4

   <u>Input</u>: Una lista C de dos curvas NURBS, la curva 1 con 5 puntos de control y la curva 2 con 4 puntos de control. Ambas son curvas B-spline uniformes de grado 3, que hemos construido con el componente `Crv` que crea una curva NURBS a partir de sus puntos de control (grado 3 es el que ha elegido Grasshopper por defecto, aunque lo podríamos modificar).

   <u>Output</u>: La superficie NURBS generada con `Loft` de tipo 0 =Normal, es una superficie B-spline con $(n, m) = (3, 4)$ de bigrado $(h, k) = (1, 3)$. La superficie es reglada, las u-curvas son rectas. Las v-curvas son B-spline de grado 3, obsérvese que la superficie contiene a las curvas input.

   Observamos que para poder unir las curvas de partida, Grasshopper ha incrementado el número de puntos de control de la curva 2 (manteniendo la curva de partida).

   En este ejemplo, utilizando cualquiera de los tipos, la superficie NURBS resultado es la misma, cambia el número de puntos de control utilizados. En la figura 2.5 mostramos el número de puntos de la malla de control (proyección en el plano xy). Con los tipos 2 =Tight y 5 =Uniform Grasshopper utiliza una malla de 4×5 puntos de control. Con los tipos 1 = *Loose* y 3 =Straight utiliza una malla de 2×5 puntos de control.

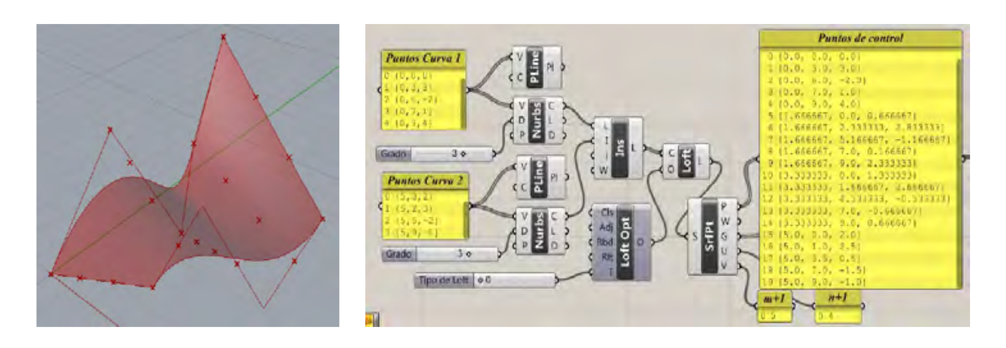


Figura 2.4: (Izq) Superficie NURBS de bigrado $(1, 3)$ (dcha) generada con el componente `Loft` de Grasshopper

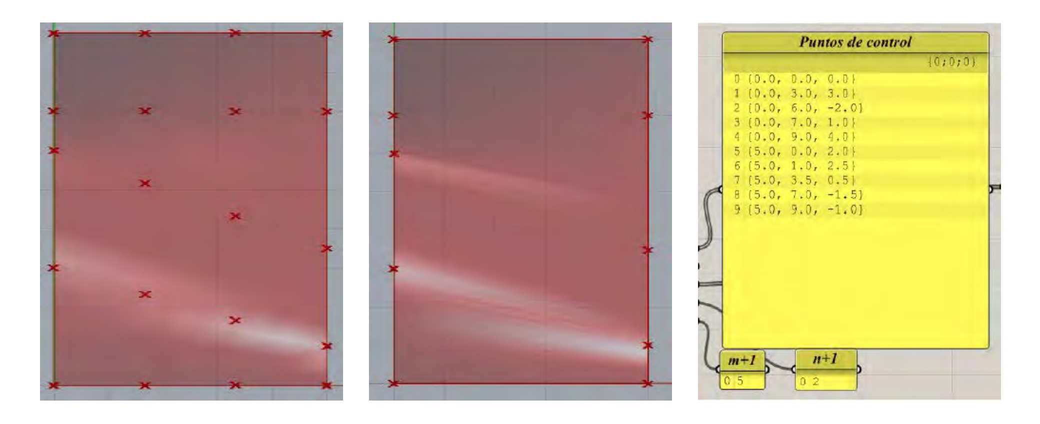


Figura 2.5: (Izq) Malla con tipo 0 =Normal. Malla del tipo 3 =Straight (centro) y (dcha) coordenadas de los puntos de control

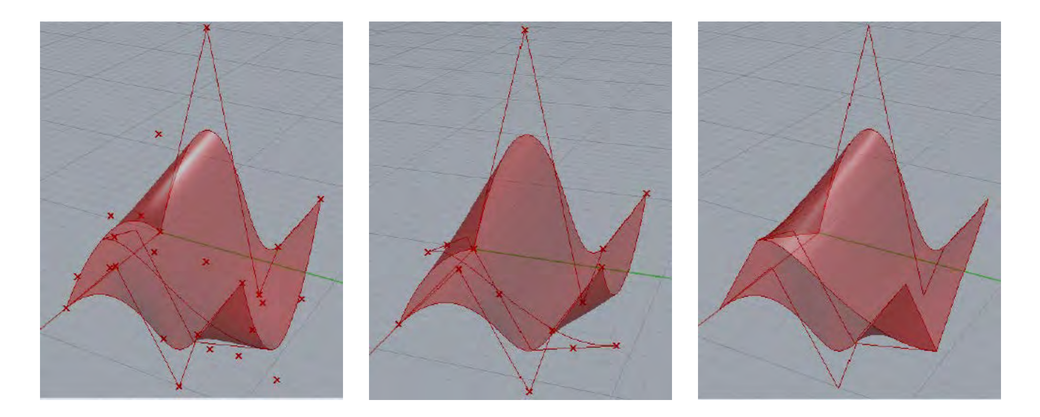


Figura 2.6: (Izq) Superficie loft con tipo 0 =Normal, (centro) tipo 1 =Loose y (dcha) tipo 1 =Straight

2. Ejemplo de la figura 2.6.

   Input: Una lista C de tres curvas NURBS, las curvas 1 y 3 con 5 puntos de control y la curva 2 con 4 puntos de control. Todas son curvas B-spline uniformes de grado 3, que hemos construido con el componente `Crv`.

   Output: La superficie NURBS generada con `Loft` de tipo 0 =Normal, es una superficie B-spline con $(n, m) = (4, 4)$ de bigrado $(h, k) = (4, 4)$. Observamos como Grasshopper ha incrementado el número de puntos de control entre las curvas input. El tipo 1 =Loose, es una superficie B-spline con $(n, m) = (4, 2)$ de bigrado $(h, k) = (4, 2)$, la superficie no contiene a la curva intermedia, la utiliza como curva de control. El tipo 3 =Straight, devuelve dos superficies regladas (un tipo Brep *boundary representation* en Grasshopper), que se unen de forma angulosa en la curva intermedia.

   Mostramos los tres casos en la figura 2.6.

2.3.3. Superficie dadas por curvas borde

El componente `EdgeSrf` de Grasshopper crea una superficie a partir de dos, tres o cuatro curvas. Como input toma las curvas A, B, C y D. Lo utilizamos para ilustrar la construcción en Grasshopper de una superficie Coons, determinada por el cuadrilátero curvo delimitado por 4 curvas B-spline de grado 3. Todas las curvas están determinadas por 5 puntos de control menos una, la curva 2, que está determinada por 4 puntos de control.

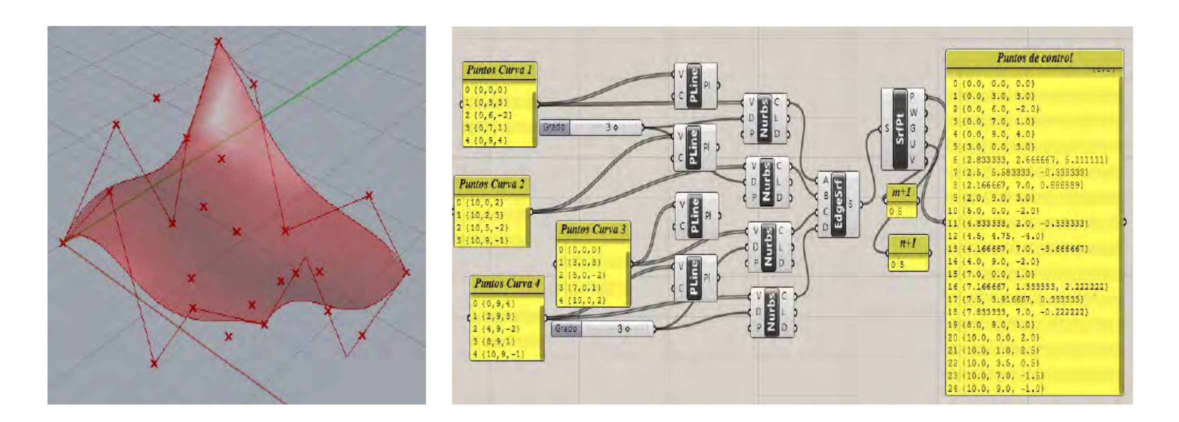


Figura 2.7: (Izq) Superficie NURBS de bigrado $(4, 4)$ superficie Coons generada con el componente `EdgeSrf` de Grasshopper (dcha)

2.3.4. Superficies en Grasshopper: cubiertas de redes de curvas y superficies de desarrollo

Analizaremos algunas de las posibilidades que ofrece Grasshopper para generar superficies a partir de curvas (como ya se ha comentado una curva en Grasshopper es una curva NURBS). Conocer las operaciones geométricas que realizan los distintos componentes ayuda al alumno a elegir la opción más apropiada para cada proyecto. Clasificamos las operaciones para crear superficies a partir de curvas en dos grandes grupos.

Cubiertas de redes de curvas (conocido como *skinning* [2]):

1. Superficies regladas y de curvas rail El componente `RuledSrf` define la superficie reglada que une puntos de dos curvas A y B. Si lo que tenemos es una curva directriz y otra que indica las direcciones de las curvas generatrices (conocemos una parametrización $\gamma(u) + v\omega(u)$) no podríamos utilizar directamente `RuledSrf`. Mostramos en la figura 2.9 la construcción del conoide de Plücker mediante el `loft` de una familia de rectas (código en la figura **??**. Con el componente `Loft` cubrimos una lista de curvas (curvas rail) con una superficie, con opciones `Loft Opt` de tipo T

   $$0 = \text{Normal},\ 1 = \textit{Loose},\ 2 = \text{Tight},\ 3 = \text{Straight},\ 4 = \text{Developable},\ 5 = \text{Uniform}.$$

   Es apropiado para listas de curvas que no intersecan entre sí. Las opciones nos permiten unir cada dos curvas con una superficie reglada ($3 =$Straight), produciendo bordes angulosos, o crear una superficie lisa ($1 = $ *Loose*) añadiendo puntos de control intermedios (véase la figura 2.6).

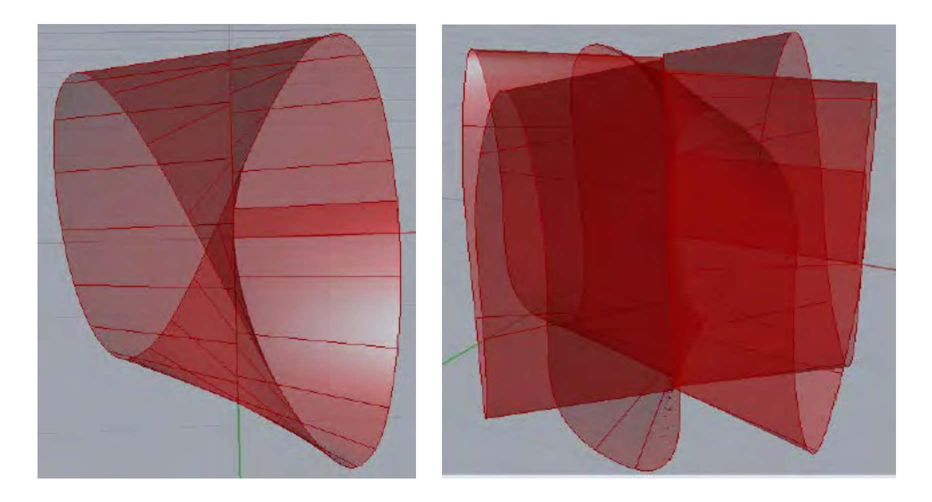


Figura 2.8: (Izq) Conoide de Plücker (dcha) una generalización obtenida moviendo un parámetro de la definición

2. Superficies suma (o traslación) y redes de curvas Con `SumSrf` obtenemos la superficie de traslación de la curva A sobre la curva B. Distintas opciones de traslación son las que proporciona el comando `Extrude` y sus variantes. Una generalización de esta idea es crear una superficie a partir de una red de curvas, con `NetSurf` partiendo de una lista U de u-curvas y otra V de v-curvas, se crea una superficie con distintas opciones de continuidad geométrica ($0 =$libre, $1 =$posición, $2 =$tangencia, $3 =$curvatura).

3. Superficies dadas por curvas borde Dadas cuatro curvas borde hemos visto cómo obtener la superficie Coons, que es lo que haría el componente `EdgeSrf`. Si partimos de una lista de curvas borde, generalizando esta idea, `Boundary` construye una superficie con dichas curvas borde.

Superficies de evolución o desarrollo (de *sweeping* [2]):

1. Superficies de revolución La superficie de revolución clásica se construye con `RevSrf` a partir de un eje de revolución V y una curva P. Más sofisticado es `RailRev`. Véase la figura 2.10.

2. Superficies de desarrollo *sweep* Esta construcción consiste en desplazar una curva sobre una curva rail y para ello es común colocar la curva que se desplaza en el plano normal a la curva rail en cada punto. Con Grasshopper podemos utilizar `Swp1` y `Swp2` que permite considerar dos curvas rail.

3. Superficies tubo Una variante del caso anterior, es construir un tubo tomando como input una curva rail, de radio fijo `Pipe` o `VPipe` de radio variable, según una lista de radios (véase la figura 2.11).

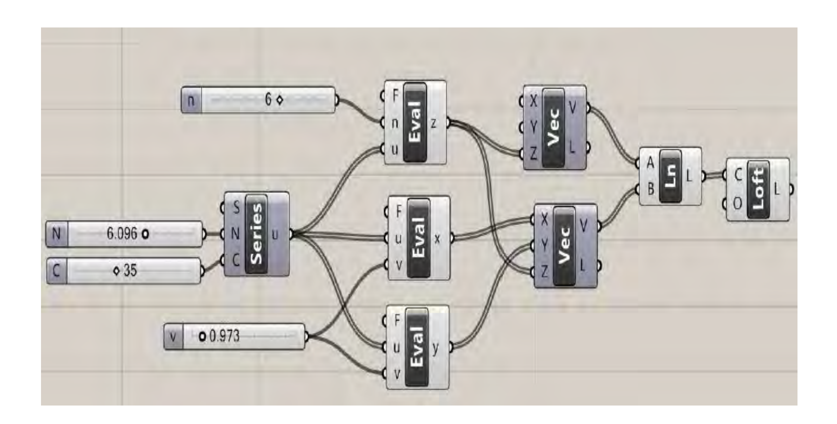


Figura 2.9: Construcción del conoide de Plücker (generalizado) mediante una familia de rectas, utilizando la parametrización

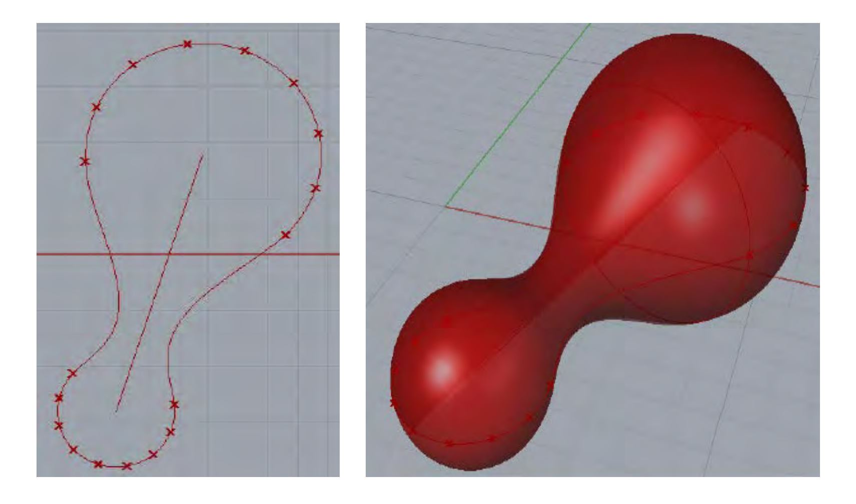


Figura 2.10: (Izq) Curva base (dcha) superficie de revolución con `Revsrf`

4. Superficies offset Grasshopper permite también construir la superficie `Offset` a distancia D.

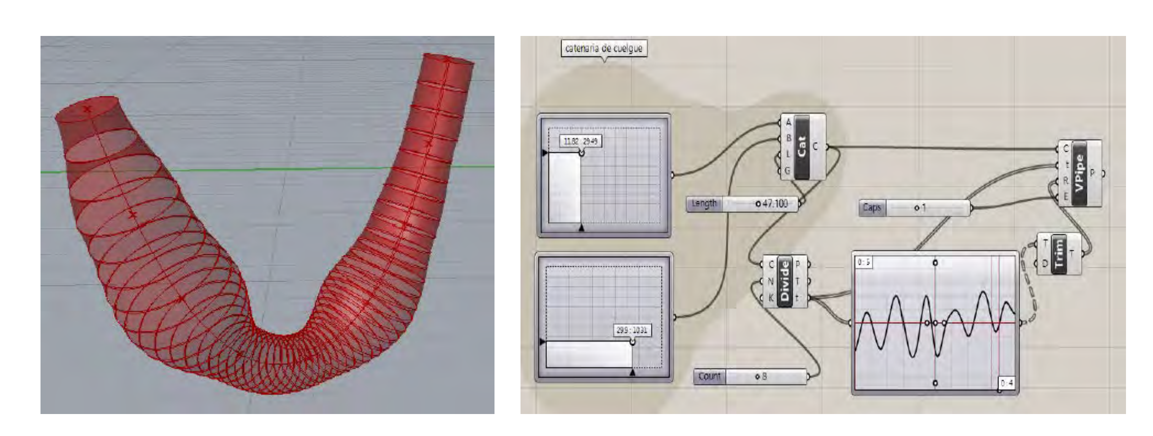


Figura 2.11: (Izq) Superficie tubo (dcha) creada sobre una catenaria, código Grasshopper

Bibliografía

[1] Flöry, S., Pottmann, H. (2010). Ruled surfaces for rationalization and design in architecture. In Proc. ACADIA (pp. 103-109).

[2] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, A. Kilian. Architectural Geometry. Bentley Institute Press, 2007.

[3] Pottmann, H., Schiftner, A., Bo, P., Schmiedhofer, H., Wang, W., Baldassini, N., Wallner, J. (2008). Freeform surfaces from single curved panels. ACM Transactions on Graphics (TOG), 27(3), 76.

[4] Postle, B. (2012). Methods for Creating Curved Shell Structures From Sheet Materials. Buildings, 2(4), 424-455.

[5] D.F. Rogers. An introduction to NURBS. With historical perspective. Academic Press, 2001.

[6] S.L. Rueda. FORMAS LIBRES I: Curvas NURBS. Cuadernillos del Instituto Juan de Herrera, 2015.

NOTAS

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

